

GUÍA VITAL

Néstor Gallegos

FOTOCOPIAS INTEGRAL  
ALMIRANTE LATORRE 752  
FONO: 671 9308

ESTE ES UN "Extra"  
de "Numerabilidad"

FOTOCOPIAS INTEGRAL  
ALMIRANTE LATORRE 752  
FONO: 671 9308

5 + 5 = 10

P13] (i) Sea  $X \subseteq \mathbb{R}$  un conjunto numerable.  
Definir  $-X = \{-x / x \in X\}$

Demuestre que  $X \cup -X$  es numerable  
(Control 3, 1993)

(ii) Sean  $A, B, C$  conjuntos tales que  
 $A \cap B = \emptyset$ ,  $A \cap C = \emptyset$  y  $|B| = |C|$

Demuestre que:

$$|A \cup B| = |A \cup C|$$



# Soluciones 8

(i) Demostremos que  $-X$  es numerable. Para ello definamos la biyección natural entre  $X$  y  $-X$

$$\phi: X \rightarrow -X \text{ (Pruébese que es biyección)}$$

Luego  $|X| = |-X| \rightarrow -X$  es numerable pues  $X$  lo es.

Así  $X \cup -X$  es numerable. (Es unión finita de numerables.

Notas Incluso la unión "numerable" de numerables es numerable.  $\square$

(ii) Para  $|B| = |C| \Rightarrow \exists \phi: B \rightarrow C$  una fm. biyectiva.

Pd q:  $|A \cup B| = |A \cup C|$ , o sea:

Pd q:  $\exists \phi: A \cup B \rightarrow A \cup C$  biyectiva.

$$\text{Sea } \phi(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in A \\ \phi(x) & \text{si } x \in B \end{cases}$$

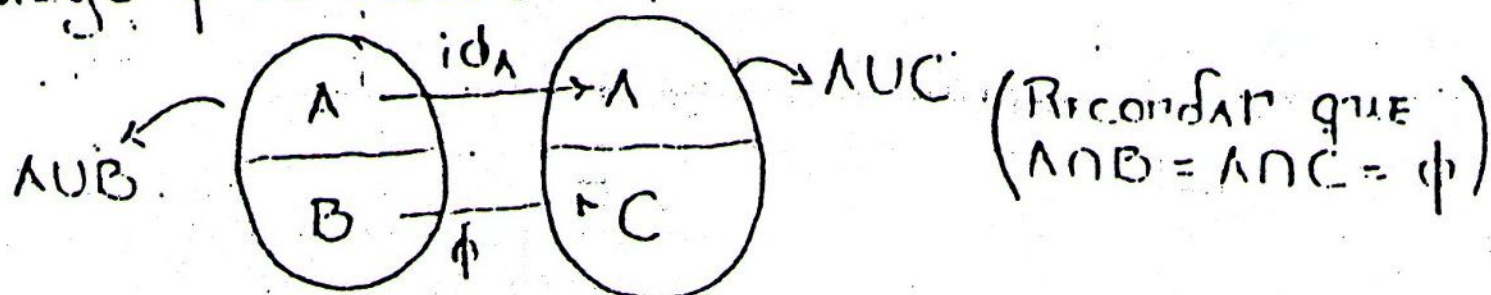
Notemos que esta bien definida pues  $A$  y  $B$  son disjuntos (o sea que  $\phi(x)$  no puede tomar 2 valores distintos)

$\hookrightarrow \phi(x) = x$  y  $\phi(x) = \phi(x)$  no va a ocurrir

Notemos que si  $x \in A \Rightarrow \phi(x) = x \in A$

y que si  $x \in B \Rightarrow \phi(x) \in C$  ( $\phi: B \rightarrow C$ )

Luego  $\phi$  es como:



Probamos que  $\phi$  es biyectiva.

①  $\phi$  inyectiva: Probamos que  $x_1 \neq x_2 \Rightarrow \phi(x_1) \neq \phi(x_2)$

Casos:  $x_1, x_2 \in A$  y  $x_1 \neq x_2$

$$\Rightarrow \phi(x_1) = x_1 \neq x_2 = \phi(x_2)$$

$x_1, x_2 \in B$  y  $x_1 \neq x_2$

$$\Rightarrow \phi(x_1) \neq \phi(x_2) \rightarrow \frac{\phi(x_1)}{\phi(x_1)} = \frac{\phi(x_2)}{\phi(x_2)}$$

Pues  $\phi$  inyectiva (pues es biyectiva)

$x_1 \in A$  y  $x_2 \in B$

$$\Rightarrow \phi(x_1) \in A \text{ y } \phi(x_2) \in C \text{ (ver dibujo)}$$

$$\Rightarrow \phi(x_1) \neq \phi(x_2) \text{ pues } A \cap C = \emptyset$$

②  $\phi$  suryectiva: Probamos que  $(\forall y \in A \cup C)(\exists x \in A \cup B)$

tal que  $\phi(x) = y$ . Hay dos casos:

Si  $y \in A \Rightarrow \exists x = y \in A \cup B$  tal que  $\phi(x) = \phi(y) = y$



Lo cual era esperado, pues al preguntarnos ¿Quién responde por "y" en A? nos contestamos que el mismo y pero en el conjunto de partida de  $\varphi$  (Pues  $\varphi$  funciona como la identidad en la parte de  $\varphi$  que va de A en A. Ahora si  $y \in C$ , entonces el "x" que responde por y en este caso no los da la fm.  $\phi: B \rightarrow C$ . Como  $\phi$  es epyectiva, dado  $y \in C$ ,  $\exists x \in B$ ,  $\phi(x) = y$ . Luego ahora  $\phi(x) = \phi(x) = y$   $\square$   
 $\perp$  pues  $x \in B$

P14/ Sea B un conjunto infinito numerable y  $\leq$  una relación de orden total definida en B. Pruebe que dado  $a \in B$ , uno de los dos conjuntos siguientes es infinito numerable

$$B_1 = \{b \in B \mid b \leq a\}, \quad B_2 = \{b \in B \mid a \leq b\}$$

(Control 2, 1999)

Solución:

Notemos que al tener  $\leq$  una relación de orden "total" en B, tendremos que dado  $b \in B$ ,  $b \leq a$  v  $a \leq b$ .  
 • •  $b \in B_1$  v  $b \in B_2$  (o quizás a ambos). Luego nos queda claro que  $B = B_1 \cup B_2$   
 (Pues  $B_1 \cup B_2 \subseteq B$  es claro y  $B \subseteq B_1 \cup B_2$  lo acabo de explicar)

Así alguno ( $B_1$  ó  $B_2$ ) es infinito pues B es infinito. (Si  $B_1$  y  $B_2$  fueran finitos  $\Rightarrow B$  sería finito ( $\rightarrow$   $\leftarrow$ )). Además cualquiera de los dos que sea, sea un subconjunto de B (numerable) y sea infinito. Luego  $B_1$  ó  $B_2$  será un subconjunto infinito de un numerable  $\Rightarrow$  será infinito numerable  $\square$

P15/ Pruebe que el siguiente conjunto es numerable.

$$C = \{x \in [0, \infty) \mid \exists m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, x^m \in \mathbb{N}\}$$

Indicaciones Recuerde que  $\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  todo real positivo tiene una única raíz m-ésima positiva.  
 (Control 2, 2000)

Solución:

Solución 1: Fijar  $m$ , o sea de primer

$$m \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \leftarrow C_m = \{x \in [0, \infty) \mid x^m \in \mathbb{N}\} \leftarrow$$

$$\circ \quad C = \bigcup_{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} C_m \leftarrow$$

la técnica es fijar  $m$  para luego "moverlo" por todos los valores posibles.

se fijado el m para el cual se cumple la propiedad

Luego si pruebo que  $C_m$  es numerable, entonces  $C$  será unión numerable de numerables, por lo que  $C$  será numerable. (20)

Basta probar entonces que  $C_m = \{x \in [0, \infty) / x^n \in \mathbb{N}\}$  es numerable. Pero  $C_m = \{x \in [0, \infty) / \exists m \in \mathbb{N}, x^m = m\}$

usando  $= \{\sqrt[m]{m} / m \in \mathbb{N}\}$   
 el hecho de que cada real tiene una única raíz  $m$ -ésima real positiva.

Def.  $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow C_m$  (Nota: En general una f.m. útil es aquella que es la en la definición de  $C_m$ )  
 $m \rightarrow \sqrt[m]{m}$

Prueben que es biyectiva. (Tengan confianza en ustedes y haganlo!)

Luego  $|\mathbb{N}| = |C_m| \therefore C_m$  es numerable.  $\square$

Segunda Solución: Def  $\tilde{C}_m = \{x \in [0, \infty) / \exists m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, x^m = m\}$   
 o sea fijos  $m$  y luego:  $m \in \mathbb{N}$

Notemos que  $\tilde{C}_m = \{\sqrt[m]{m} / m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$  pues cada real tiene una única raíz real positiva.  
 Def  $\tilde{\varphi}: \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow \tilde{C}_m$   
 $m \rightarrow \sqrt[m]{m}$

Prueben que  $\tilde{\varphi}$  es biyectiva y que no necesariamente es inyectiva (Pensar en  $\tilde{\varphi}: \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow \tilde{C}_1$ )

Luego  $\underbrace{|\mathbb{N} \setminus \{0\}|}_{|\mathbb{N}|} \geq |\tilde{C}_m|$ . Prueben que  $\tilde{\varphi}: \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow \tilde{C}_m$   
 $m \rightarrow \sqrt[m]{m}$

es biyectiva si  $m \neq 0$   
 $m \neq 1$ :

Luego  $\tilde{C} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \tilde{C}_m$

$\Rightarrow |\tilde{C}_m|$  es finito para  $m=0,1$

es unión numerable de conjuntos a lo mas numerable (finito o numerable) y  $\tilde{C}_m$  numerable si  $m \geq 2$ .

donde por lo menos uno de ellos es "numerable"  $\Rightarrow \tilde{C}$  es numerable.  $\square$   
 $\perp \tilde{C}_2, \tilde{C}_3, \dots$

Notar que la segunda solución es bastante mas complicada que la primera, lo cual se basa en que  $\sqrt[m]{m}$  (la función clave) es inyectiva como f.m. de  $m$  pero no como f.m. de  $m$ . Es "importante" notar que no siempre tendrán una f.m. biyectiva (Quizás solo sea inyectiva o solo sea suryectiva)



También es clave notar que si  $f = \bigcup_{a \in A} f_a$  [donde  $A$  es numerable]  
 y los  $f_a$  o son finitos o son numerables ( $|f_a| \leq |\mathbb{N}|$ )  
 es imprescindible que a lo menos uno de ellos sea nume-  
 rable para que  $f$  sea numerable.  
 Por último, mirar bien las expresiones que salen en el  
 conjunto pues lo más probable es que ahí se encuentre  
 la "clave" para resolver el problema.

P16) Para todo  $m \in \mathbb{N}$  se tiene la función  $f_m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .  
 Además  $f_1 = \text{id}_{\mathbb{R}}$ . Sea  $A \subseteq \mathbb{R}$  y  $B = \{f_m(a) / a \in A, m \in \mathbb{N}\}$   
 Prueba que si  $A$  es infinito numerable, entonces  $B$  es  
 infinito numerable. (Control 2, 2001)

Solución:

Sea  $B_m = \{f_m(a) / a \in A\}$  ← Hemos fijado  $m$   
 Luego  $B = \{f_m(a) / a \in A, m \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \{f_m(a) / a \in A\}$   

$$= \bigcup_{m \in \mathbb{N}} B_m$$

Notemos además que  $B_1 = \{f_1(a) / a \in A\} = \{\text{id}_{\mathbb{R}}(a) / a \in A\}$   

$$= \{a / a \in A\}$$
  

$$= A.$$

Luego  $B_1$  es numerable (Pues  $A$  numerable), o sea, por lo  
 menos uno de los  $B_m$  es numerable. Luego basta probar  
 de  $|B| \leq |\mathbb{N}|$  pues si así fuera,  $B$  sería numerable  
 (por lo comentado arriba de esta página.)

Consideremos la función:

Definiremos  $f_m: A \rightarrow B_m$  claramente estrictiva  
 la función  $a \rightarrow f_m(a)$  (Pruebenlo!).  
 de  $B_m$

por lo que  $|A| \geq |B_m|$

$|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{N}|$  Pues  $A$  es numerable  $\square$

P17) (a) Sea  $A = \{x \in \mathbb{R} / \exists k \in \mathbb{Z}, \exists i \in \mathbb{N}, x = \frac{k}{3^i}\}$   
 Prueba que  $A$  es numerable. (Control 2, 1998)

(b) Sea  $A \subseteq \mathbb{R}$  el conjunto

$$A = \{r + d\sqrt{2} / r, d \in \mathbb{Q}\}$$

Prueba que  $A$  es infinito numerable  
 (Control 2, 1992)

(c) Si  $A$  y  $B$  son conjuntos numerables.

Prueba que  $A \times B$  es numerable.

Resolución:

(a) Resolución 1. (Es mucho más corta, pero en general para problemas más difíciles es mejor dominar la resolución 2)

(22)

Los elementos de  $A$  son de la forma  $\frac{k}{3^i} \in \mathbb{Q}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) ( $i \in \mathbb{N}$ )

Luego  $A \subseteq \mathbb{Q}$ . Además  $A$  es infinito pues en particular contiene a los números de la forma  $\frac{k}{3^0} = k$  con  $k \in \mathbb{Z}$ , o sea, contiene a los enteros.

Como  $A$  es un subconjunto infinito de un numerable ( $\mathbb{Q}$ ) se tiene que  $A$  es numerable.

Resolución 2:

Sea  $A_i = \{x \in \mathbb{R} / \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{k}{3^i}\}$  y  $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$   
 $= \{\frac{k}{3^i} / k \in \mathbb{Z}\}$

Sea  $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow A_i$ . Es fácil probar que  $\varphi$  es biyectiva.  
 $k \rightarrow \frac{k}{3^i}$

Luego  $|A_i| = |\mathbb{Z}| \Rightarrow A_i$  son numerables

$\Rightarrow A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$  es numerable pues es unión numerable de numerables.  $\square$

(b)  $A = \{r + i\sqrt{2} / r, i \in \mathbb{Q}\} = \bigcup_{i \in \mathbb{Q}} \{r + i\sqrt{2} / r \in \mathbb{Q}\}$

Sea  $\varphi: \mathbb{Q} \rightarrow A_i$  (Tratar de notar que siempre lo hago igual)  
 $r \rightarrow r + i\sqrt{2}$  Hemos fijado  $i$ .

Claramente  $\varphi$  es biyectiva.

(Notar que en todos nuestros problemas la biyectividad es fácil por construcción de la función)

$\Rightarrow A = \bigcup_{i \in \mathbb{Q}} A_i$  es numerable pues  $\mathbb{Q}$  es numerable y  $A_i$  es unión numerable de numerables.  $\square$

(c) Debemos que  $A \times B = \{(a, b) / a \in A, b \in B\}$

Sea  $H_b = \{(a, b) / a \in A\} \leftarrow$  Hemos fijado  $b$

$\Rightarrow A \times B = \bigcup_{b \in B} H_b$ . Consideremos  $\varphi: A \rightarrow H_b$   
 $a \rightarrow (a, b)$

No es difícil probar que  $\varphi$  es biyectiva

$\therefore |A| = |H_b| \Rightarrow H_b$  numerable pues  $A$  es numerable.

(23)



$$\Lambda_D = \{r + i\sqrt{2} / r \in \mathbb{Q}\} \xrightarrow{\sim} \varphi : \mathbb{Q} \rightarrow \Lambda_D$$
  

$$r \mapsto r + i\sqrt{2}$$

$$\gamma \quad H_b = \{(a, b) \mid a \in A\} \xrightarrow{\varphi \in \Lambda \rightarrow H_b} a \rightarrow (a, b)$$

P18 (Pregunta) Muestre que el conjunto  
 $A = \{(m, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m \leq m\}$   
 es infinito numerable. (Control 3, 1995)

P19 Sea  $H = \{a^b \mid a \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \text{ y } b \in \mathbb{Q}\}$   
Probar que  $H$  es numerable (Control 3, 1994)

La primera intención es decir que  $H$  es un subconjunto infinito de un numerable pero  $2^{\frac{1}{2}} \in H$  ( $\sqrt{2} \in H$ ) o sea  $H$  contiene a números irracionales. Busquemos entonces otra alternativa de solución.

$$\forall a \in \mathbb{N} \quad \mathcal{H}_b = \{a^b \mid a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \leftarrow \text{Fijo } b \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow H = \bigcup_{b \in \mathbb{Q}} H_b$$

$$\forall a \in A \quad \varphi : \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow H_b$$

φ perspectiva "claramente."  
(A VECES LAS COSAS MAS CLARAS  
SON AQUELLAS QUE MAS CUESTA  
VER)

$\varphi$  injectiva?

$\varphi$  injective?  $\varphi(a_1) = \varphi(a_2) \Leftrightarrow a_1^b = a_2^b \stackrel{?}{\Rightarrow} a_1 = a_2$   
 (In general not surjective. (For example if  $b=2$ ))

Però si  $b=1$ , ne scappo.

Entonces  $\varphi: \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow H$  biyectiva  $\Rightarrow \frac{|\mathbb{N} \setminus \{0\}|}{|\mathbb{N}|} = |H|$

 $\aleph_0$ ), countable.



En general  $\varphi: \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}_b$  es epinyectiva

(24)

$$\circ \circ \frac{|\mathbb{N} \setminus \{0\}|}{|\mathbb{N}|} \geq |\mathbb{N}_b| \Rightarrow \mathbb{N}_b \text{ finito o numerable.}$$

$\Rightarrow \mathbb{N} = \bigcup_{b \in \mathbb{Q}} \mathbb{N}_b$  es numerable pues  $|\mathbb{N}_b| \leq |\mathbb{N}|$  y  $|\mathbb{N}_1| = |\mathbb{N} \setminus \{0\}| = |\mathbb{N}|$   
 $\hookrightarrow$  A lo menos uno numerable.

P20 (Propuesto) Pruebe que el conjunto  $H = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid A \text{ es finito}\}$  es numerable (Control 2, 1990)

(Este es más complicado)

P21 Sean  $A, B, C, D$  conjuntos no vacíos cualquiera, no necesariamente finitos. Supongamos que  $|A| = |C|$  y  $|B| = |D|$ . Definamos  $\mathcal{F}(A, B) = \{f \mid f \text{ es fm. de } A \text{ en } B\}$ . Demuestre que  $|\mathcal{F}(A, B)| = |\mathcal{F}(C, D)|$

Indicación: Si  $\psi: A \rightarrow C$  y  $\varphi: B \rightarrow D$  son biyecciones, construye

$$\Phi: \mathcal{F}(A, B) \rightarrow \mathcal{F}(C, D)$$

$$f \mapsto \varphi \circ f \circ \psi^{-1}$$

Solución:

Como  $|A| = |C|$ , existe  $\psi: A \rightarrow C$  biyectiva y como  $|B| = |D|$ , existe  $\varphi: B \rightarrow D$  biyectiva. Por estas funciones construimos la función

$$\Phi: \mathcal{F}(A, B) \rightarrow \mathcal{F}(C, D)$$

$$f \mapsto \varphi \circ f \circ \psi^{-1}$$

y demostramos que es biyectiva por lo que  $|\mathcal{F}(A, B)| = |\mathcal{F}(C, D)|$

Notemos que  $\varphi \circ f \circ \psi^{-1}$  tiene que pertenecer a  $\mathcal{F}(C, D)$  pues  $\psi^{-1}: C \rightarrow A$ ,  $f: A \rightarrow B$  y  $\varphi: B \rightarrow D$ .

Probamos ahora que:

$$\textcircled{1} \text{ f inyectivas } \Phi(f_1) = \Phi(f_2) \Rightarrow \varphi \circ f_1 \circ \psi^{-1} = \varphi \circ f_2 \circ \psi^{-1}$$

$$\Rightarrow \varphi^{-1} \circ (\varphi \circ f_1 \circ \psi^{-1}) \circ \psi = \varphi^{-1} \circ (\varphi \circ f_2 \circ \psi^{-1}) \circ \psi$$

$$\Rightarrow (\varphi^{-1} \circ \varphi) \circ f_1 \circ (\psi^{-1} \circ \psi) = (\varphi^{-1} \circ \varphi) \circ f_2 \circ (\psi^{-1} \circ \psi)$$

$$= \text{id}_B \circ f_1 \circ \text{id}_A = \text{id}_B \circ f_2 \circ \text{id}_A$$

$$\circ \circ \text{id}_B \circ f_1 \circ \text{id}_A = \text{id}_B \circ f_2 \circ \text{id}_A \Rightarrow f_1 = f_2 \text{ (Luego } \Phi \text{ es inyectiva)}$$

$$\textcircled{2} \text{ f epinyectivas } \forall g \in \mathcal{F}(C, D) (\exists f \in \mathcal{F}(A, B)) \Phi(f) = g$$

$$\text{Probamos } \rightarrow \Phi(f) = \varphi \circ f \circ \psi^{-1} = g \mid \varphi^{-1} \circ ( ) \circ \psi$$

$$\dots f = \varphi^{-1} \circ g \circ \psi$$



Luego  $(\forall g \in \mathcal{F}(C, D)) (\exists f = \varphi^{-1} \circ g \circ \psi \in \mathcal{F}(A, B))$  ☺  
 tal que  $\phi(f) = g$  verificarlo  $\forall$

En efecto  $\phi(f) = \varphi \circ f \circ \psi^{-1} = \varphi \circ (\varphi^{-1} \circ g \circ \psi) \circ \psi^{-1}$   
 $= (\varphi \circ \varphi^{-1}) \circ g \circ (\psi \circ \psi^{-1})$   
 $= \text{id}_D \circ g \circ \text{id}_C = g \quad \square$

Luego es biyectiva  $\Rightarrow |\mathcal{F}(A, B)| = |\mathcal{F}(C, D)|$

P22/ Sean  $C, D$  conjuntos no vacíos con  $C$  finito y  $D$  infinito numerable. ¿Dea?

$$\mathcal{F}(C, D) = \{f: C \rightarrow D \mid f \text{ es función}\}$$

Muestre que  $\mathcal{F}(C, D)$  es infinito numerable.

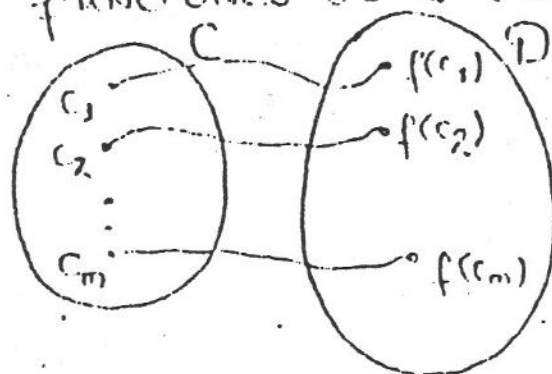
Indicación: Puede usar la siguiente propiedad:

Si  $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_m$  son conjuntos numerables, entonces  $\Lambda = \Lambda_1 \times \Lambda_2 \times \dots \times \Lambda_m$  es numerable (Control 3, 1995)

Solución:

Pero  $C$  es finito, sea  $C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$  con  $|C| = m$ .

Luego las funciones de  $\mathcal{F}(C, D)$  son del tipo



y notamos que la función  $f$  queda totalmente caracterizada por  $f(c_1), \dots, f(c_m)$  (un número finito de valores)

Esto nos inspira a considerar la función:

$$\begin{aligned} \rho \in \mathcal{F}(C, D) &\rightarrow D \times D \times \dots \times D = D^m \\ \rho &\rightarrow (f(c_1), f(c_2), \dots, f(c_m)) \end{aligned}$$

"m veces"

donde  $D^m$  es numerable (ya que  $D$  es numerable podemos usar la indicación)

Probamos ahora que  $\rho$  es biyectiva.

①  $\rho$  inyectiva:

$$\begin{aligned} \rho(f) = \rho(g) &\Rightarrow (f(c_1), \dots, f(c_m)) = (g(c_1), \dots, g(c_m)) \\ &\Rightarrow f(c_i) = g(c_i) \quad i=1, \dots, m \\ &\Rightarrow f(c) = g(c) \quad \forall c \in C \end{aligned}$$

pues por

iguales en todos los dominios.

$$\Rightarrow f = g$$

②  $\rho$  suryectiva:

$$\text{Pda } q: (\forall (y_1, \dots, y_m) \in D^m) (\exists f \in \mathcal{F}(C, D)) (\rho(f) = (y_1, \dots, y_m))$$

PENDEMOS: Queremos que  $\varphi(f) = (f(c_1), f(c_2), \dots, f(c_m))$   
 $= (y_1, y_2, \dots, y_m)$

Luego queremos que  $f(c_i) = y_i \quad i=1, \dots, m$   
 $\hookrightarrow$  Esta es la  $f \in \mathcal{F}(C, D)$   
 que buscamos

Dado  $(y_1, \dots, y_m) \in D^m$ ,  $\exists f \in \mathcal{F}(C, D)$  que asigna  
 valores de tal manera que  $f(c_1) = y_1, f(c_2) = y_2,$   
 $\dots, f(c_m) = y_m$ .

Luego tendremos que:

$$\varphi(f) = (f(c_1), f(c_2), \dots, f(c_m)) = (y_1, y_2, \dots, y_m)$$

Luego  $\varphi$  es biyectiva y por lo tanto:

$$|\mathcal{F}(C, D)| = |D^m|$$

Pero  $|D^m| = |\mathbb{N}|$  ( $D^m$  es numerable, pues es el producto  
 de conjuntos numerables).

Luego  $|\mathcal{F}(C, D)| = |\mathbb{N}|$ , o sea.  $\mathcal{F}(C, D)$  es numerable.  $\square$

Esto es lo primero que escribo como dedicatoria este año  
 2004. Este año, o por lo menos el primer semestre decidí  
 no ser auxiliar, pero aún así decidí publicar esta  
 colección de guías hechas con mucha dedicación. Espero  
 muy sinceramente haber podido ayudarlos y motivarlos  
 en esta difícil tarea que ahora emprenden.

Les reitero las gracias por la confianza que han tenido  
 en estas guías y quiero desearles todo lo mejor para  
 este año y que todas sus metas se cumplan. Pongan  
 mucha fuerza y empeño que esta valla que parece in-  
 superable se puede pasar. Si muchos con todo  
 su esfuerzo lo han logrado, ¿Porqué ustedes no  
 podrían? ¡ÁNIMO!

¡VAMOS QUE SE  
 PUEDE!

CON APOYO  
 DAVID